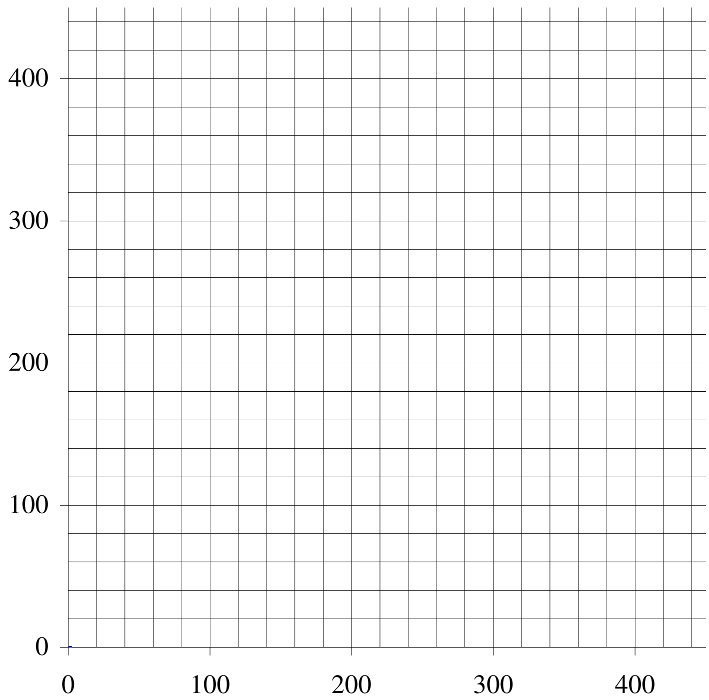
Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1 (Aufgabe 5, SS 1999, VWL B, 14.07.1999 [2. Wdh. vom WS 1998/99])

Eine Unternehmung mit der Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = 5x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$ stellt den Output y = 700 her. Die Faktorpreise betragen q_1 = 16 und q_2 = 25.

a) Bestimmen Sie die minimalen Produktionskosten.

b) Skizzieren Sie die von Ihnen ermittelte Minimalkostenkombination, indem Sie die Isoquante mit dem Output y = 700 (mit Wertetabelle!) und die Isokostengerade in der vorbereiteten Graphik darstellen.



Wertetabelle für die Isoquante:

x_1	x_2
50	
100	
200	
300	
400	

Aufgabe 7.2 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 5, WS 1998/99, VWL B, 19.02.1999, leicht verändert)

a) Ermitteln Sie die kostenminimalen Einsatzmengen der Produktionsfaktoren und die optimale Produktionsmenge einer Unternehmung unter folgenden Bedingungen:

Produktionsfunktion: $y = 3{,}849 \times x_1^{\frac{1}{2}} \times x_2^{\frac{1}{2}}$

Kostenbudget: KS = 3.150

Faktorpreise: q_1 = 3,5 q_2 = 10,5

b) Skizzieren Sie den Expansionspfad, die Isokostengerade und kennzeichnen Sie die zugehörige Minimalkostenkombination.

Aufgabe 7.3 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 5, SS 1998, VWL B, 21.07.1998 [2. Wdh. vom WS 1997/98], leicht verändert)

Eine Unternehmung stelle ein Produkt unter Einsatz von zwei Produktionsfaktoren her:

a) Leiten Sie (allgemein) graphisch unter Zuhilfenahme des vollständigen Differentials die Bedingung der Minimalkostenkombination her.

b) Berechnen Sie die optimalen Faktoreinsatzmengen der Unternehmung, die mit der Produktionsfunktion $y = 0{,}8 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ und einem Kostenbudget von KS = 125.000 DM produziert. Die Faktorpreise lauten $q_1 = 5$ und $q_2 = 10$.

Aufgabe 7.4 (Aufgabe 3, SS 1999, VWL A, 30.09.1998 [1. Wdh.], leicht verändert)

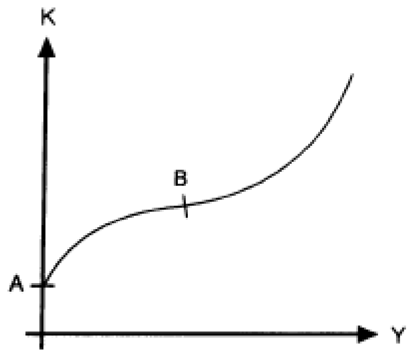
a) Erläutern Sie verbal den durch die Produktionsfunktion $y = f(\underline{x})$ beschriebenen Zusammenhang.

b) Zeigen Sie <u>formal</u> die drei möglichen Arten von Skalenerträgen (returns of scale) auf und erläutern Sie diese auch <u>verbal</u>.

c) Zeichnen Sie in ein Diagramm je eine Produktionsfunktion mit konstanten, zunehmenden und abnehmenden Skalenerträgen ein und bezeichnen Sie diese. (Vergessen Sie nicht die Achsenbezeichnungen!)

Aufgabe 7.5 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, SS 1997, VWL B, 18.07.1997 [2. Wdh. WS 1996/97], nur Teil [b])

b) Betrachten Sie die folgende Abbildung; sie ist der Unternehmenstheorie (Kapitel 7 des Buches von Reiß) entnommen. Kreuzen Sie jeweils "richtig" oder "falsch" an!



	richtig	falsch
Der Graph bezeichnet eine Produktionsfunktion.	☐	☐
Im Punkt A sind Grenzkosten und Fixkosten identisch.	☐	☐
Der Graph kennzeichnet mit steigendem Output zuerst sinkende, dann steigende Skalenerträge.	☐	☐
Im Wendepunkt (B) sind die Durchschnittskosten minimal.	☐	☐
Der Graph ordnet jeder Kostensumme die maximale Outputmenge zu.	☐	☐

Aufgabe 7.6 (Aufgabe 5, WS2000/2001, VWL B, 25.07.2001)

Die Produktionsfunktion einer Unternehmung sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Die Preise seien q_1 und q_2.

a. Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination.
b. Bestimmen Sie den Expansionspfad.
c. Bestimmen Sie die Kostenfunktion.

Aufgabe 7.7 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 3, SS2001, VWL B, 09.04.2001)

(a) Bestimmen Sie für den „2-Faktor-Fall" einer allgemeinen Cobb-Douglas-Produktionsfunktion die Kostenfunktion. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Produktion konstante Skalenerträge aufweist.
(b) Was muss in diesem Fall in bezug auf die Höhe der Grenz- und Durchschnittskosten gelten (keine Berechnung; nur verbale Begründung!)?

Aufgabe 7.8 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, SS 2000, VWL B, 03.04.2000 [1. Wdh. vom WS 1999/2000], leicht verändert)

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion einer Unternehmung unter folgenden Annahmen:

Produktionsfunktion: $y(x_1, x_2) = 0{,}8 \cdot x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$;
Faktorpreise: $q_1 = 5$, $q_2 = 20$.

b) Skizzieren Sie die Kostenfunktion (mit Wertetabelle!). *Hinweis:* Denken Sie an die Benennung und Skalierung der Achsen!

Aufgabe 7.9 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, SS 2000, VWL B, 19.07.2000 [2. Wdh. vom WS 1999/2000])

Gegeben sei die folgende Produktionsfunktion:

$$y = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \quad \underline{\text{mit}} \quad a_1, a_2 > 0 \quad \wedge \quad a_1 + a_2 = 1.$$

a) Bestimmen Sie formal die optimale Nachfrage nach den Faktoren in Abhängigkeit von y [bedingte Faktornachfrage := $x_i(\underline{q}, y)$]. Gehen Sie dabei von beliebigen aber fest vorgegebenen Faktorpreisen aus.

b) Für die Faktorpreise gelte $q_2 = 3q_1$. Bestimmen Sie für $a_1 = \frac{1}{4}$ und $a_2 = \frac{3}{4}$ formal die Kosten-, Grenzkosten- und Durchschnittskostenfunktion. Tipp: Gehen Sie dabei von den in Aufgabenteil (a) bestimmten Faktornachfragen aus.

Aufgabe 7.10 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 2, WS 1998/99, VWL B, 19.02.1999, leicht verändert)

Gegeben sei die Kostenfunktion

$$C(y) = 3q_1 \times q_2 \times y^2 \qquad \text{mit} \qquad q_1 = \frac{1}{2} \quad q_2 = \frac{1}{3}$$

a) Zeichnen Sie in den oberen Teil eines zweiteiligen Diagramms die Kostenfunktion ein und vervollständigen Sie die Achsen.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Grenzkosten- und die Durchschnittskostenfunktion.

c) Zeichnen Sie in den unteren Teil des Diagramms die Grenzkostenfunktion und Durchschnittskostenfunktion ein und vervollständigen Sie die Achsen.

d) Bestimmen Sie graphisch – sowohl im oberen wie im unteren Diagramm – das gewinnmaximierende Angebot des Unternehmers bei einem Güterpreis von $p = 5$.

Aufgabe 7.11 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, SS 1996, leicht verändert)

Eine ihre Kosten minimierende, unter Bedingungen vollständiger Konkurrenz stehende Unternehmung produziere den Output Y mit den Produktionsfaktoren Arbeit (x_1) und Kapital (x_2) nach Maßgabe der Produktionsfunktion $y = 10\sqrt{x_1 x_2}$.

Die Preise der Faktoren sind gleich hoch, also $q_1 = q_2$. Beide Faktoren sind vollständig variabel. Berechnen Sie unter Verwendung der Lagrangemethode,

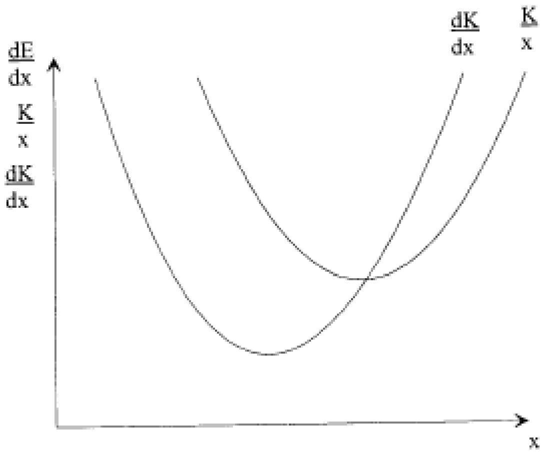
a) in welchem Verhältnis die Faktoren zueinander eingesetzt werden;

b) welcher Zusammenhang zwischen der Outputmenge y und der Einsatzmenge des Faktors Arbeit x_1 unter den gemachten Annahmen bestehen wird (stellen Sie die Lösung graphisch dar);

c) die Kosten- und die Grenzkostenfunktion der Unternehmung.

Aufgabe 7.12 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, WS 1997/98, VWL B, 04.03.1998)

Die Kostenstruktur der auf einem Markt mit vollständiger Konkurrenz agierenden Mikro GmbH Co. KG sei durch nachstehende Graphik beschrieben.



Bearbeiten Sie mit Hilfe dieser Darstellung die folgenden Aufgabenstellungen:

a) Zeichnen Sie die Grenzerlösfunktion (*dE/dx*) so in das Koordinatensystem ein, dass der maximale Gewinn gleich Null ist $(G_{\max} = 0)$ und zeichnen Sie die optimale Produktionsmenge (x_a) sowie den entsprechenden Preis (p_a) ein.

b) Halten Sie in der unter a) bestimmten Situation die Schließung der Mikro GmbH & Co. KG für erforderlich? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Durch Veränderungen am Markt sinkt der Gleichgewichtspreis auf p_b (mit $p_b < p_a$). Welche Konsequenzen hat dies für unsere Unternehmung? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

Aufgabe 7.13 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 2, SS 1997, 18.07.1997 [2. Wdh. vom WS 1996/97], nur Teile [a - c], leicht verändert)

Gegeben seien die Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = 6x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$, die Faktorpreise $q_1 = 4$, $q_2 = 25$ und der Produktpreis $p = 100$.

Berechnen Sie (unter Zuhilfenahme der "Wertgrenzproduktregel"):

a) die gewinnmaximalen Einsatzmengen der Produktionsfaktoren x_1^* und x_2^*,
b) den gewinnmaximalen Output y^*,
c) den bei y^* erzielbaren Gewinn.

Aufgabe 7.14– Kontrollaufgabe

a) Unter welcher Bedingung entspricht die Grenzkostenfunktion der Angebotsfunktion der Unternehmung?

b) Gehen Sie von einer S-förmigen Kostenfunktion aus. Wieso gehört der fallende Teil der Grenzkostenfunktion nicht zur Angebotsfunktion der Unternehmung?

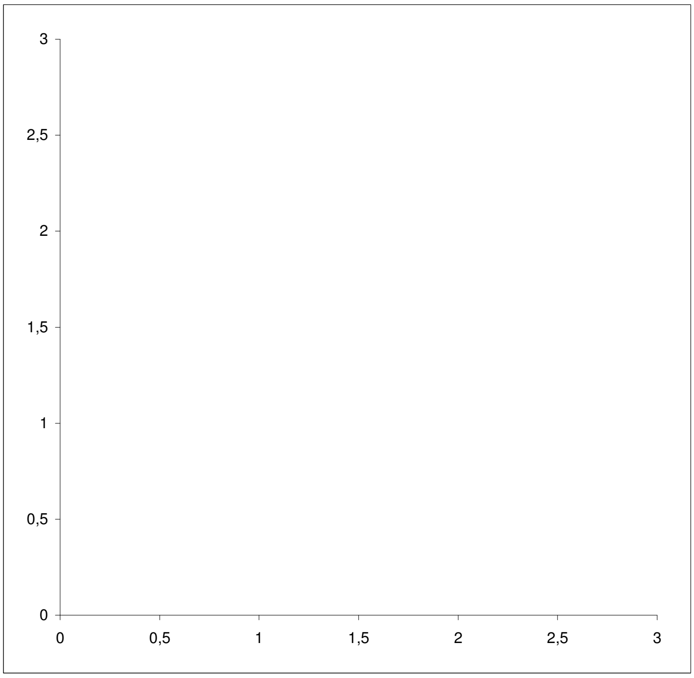
Aufgabe 7.15 – (Aufgabe 4, WS 2002/2003, VWL B, 11.08.2003)

Gegeben seien die bedingten Faktornachfragen (die optimalen Faktornachfragen in Abhängigkeit von $\underline{q}$ und y) einer Unternehmung unter vollständiger Konkurrenz, die mit den Faktoren x_1 und x_2 das Produkt y herstellt (es gelte die übliche Nomenklatur):

$$x_i = \frac{a_i}{q_i} \cdot A \cdot y^{\frac{1}{r}}$$

mit $a_i > 0$, $a_1 + a_2 = 1$, $A > 0$ und $r > 0$; $i = 1,2$.

a) Gehen Sie von den bedingten Faktornachfragen aus und ermitteln Sie formal die Grenzkostenfunktion der Unternehmung.
b) Es gelte $A = 2$. Skizzieren Sie in der nachfolgenden Abbildung die Grenzkostenfunktionen für die Fälle $r = 0{,}5$, $r = 1$ und $r = 2$. Denken Sie an die Beschriftung der Achsen und Funktionen!



c) Der Güterpreis sei $p^* = 2$. Beantworten Sie anhand der im Aufgabenteil b) erstellten Abbildung die folgenden Fragen:

   c.1) Welches ist die optimale Angebotsmenge für den Fall $r = 0{,}5$?
   c.2) Wie hoch ist der Gewinn im Falle $r = 1$, wenn das Unternehmen zwei Gütereinheiten anbietet? Begründen Sie Ihre Antwort <u>kurz</u>!
   c.3) Was geschieht mit dem Gewinn, wenn das Unternehmen bei $r = 2$ die Angebotsmenge von Null sukzessive bis zur Kapazitätsgrenze erhöht? Begründen Sie Ihre Antwort <u>kurz</u>!

Aufgabe 7.16 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 4, WS 2002/2003, VWL B, 26.02.2003)

Gegeben seien die bedingten Faktornachfragen◈ einer Unternehmung unter vollständiger Konkurrenz, die mit den Faktoren x_1 und x_2 das Produkt y herstellt (es gelte die übliche Nomenklatur):

$$x_i = \frac{a_i}{q_i} \underbrace{\left(\frac{q_1}{a_1}\right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2}\right)^{a_2}}_{:=C^*} y^{\frac{1}{r}} = \frac{a_i}{q_i} C^* \; y^{\frac{1}{r}}$$

mit $a_i > 0$, $a_1 + a_2 = 1$ und $r > 0$; $i = 1,2$.

◈ := optimale(n) Faktornachfrage(n) in Abhängigkeit von $\underline{q}$ und y

a) Gehen Sie von den bedingten Faktornachfragen aus und ermitteln Sie formal die Grenzkostenfunktion der Unternehmung.
b) Setzen Sie die Grenzkostenfunktion mit dem Güterpreis gleich und formen Sie nach y um.
c) Wie heißt die unter b) gefundene Funktion?
d) Für welche Werte von r spiegelt die unter b) ermittelte Funktion ein Gewinnmaximierungsverhalten der Unternehmung wider? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der unter a) ermitteln Grenzkostenfunktion (beachten Sie dabei den Definitionsbereich von r; s.o.)!
e) Inwieweit wäre das Ergebnis unter c) zu modifizieren, wenn Fixkosten zu berücksichtigen wären (keine Berechnung; nur <u>kurze</u> Erläuterung)?

Aufgabe 7.17 – Kontrollaufgabe (Aufgabe 5, WS 2002/2003, VWL B, 20.10.2003)

Gegeben seien die Produktionsfunktion sowie die technische Grenzrate der Substitution einer Unternehmung unter vollständiger Konkurrenz:

$$y = A x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_1}$$

<u>mit</u> $A, a_1, a_2 > 0$.

Es gelte die übliche Nomenklatur.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der technischen Grenzrate der Substitution formal den Expansionspfad der Unternehmung.

b) Es gelte $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$. Bestimmen Sie formal die Kostenfunktion der Unternehmung.

c) Zusätzlich zu den bisher gemachten Angaben gelte $q_2 = 2q_1$. Bei welchen Güterpreisen würde die Unternehmung auf dem Markt anbieten? Geben Sie einen Wertebereich in der Form " $p \geq$ " an.