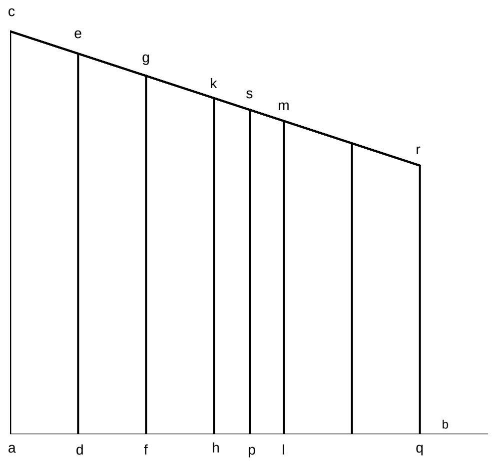
Lösungen zu den Aufgaben zum Kapitel 4

Aufgabe 4.1 (Aufgabe 6, SS 1999, VWL A, 30.09.1998 [1. Wdh. vom SS 1999], nur Teil [a], leicht verändert)

a)



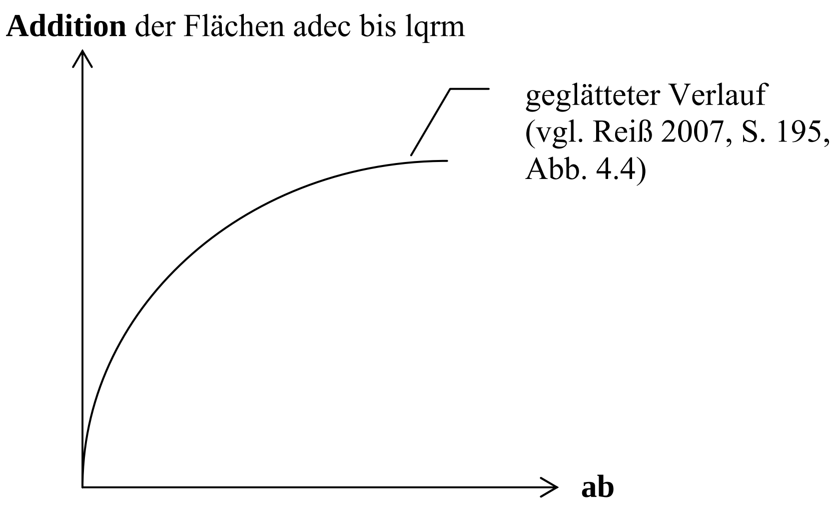
"Man stelle durch die Linie **ab** (Fig. 1) die Zeit vor, die ein Genuss währt, dergestalt, dass jeder Punkt derselben einem Zeitmoment entspricht, und daher jeder Theil der Linie **ab** dem entsprechenden Zeittheile ..." (H.H. Gossen, Entwicklung der Gesetze ..., S. 8, Reiß-Buch S. 182).

a1) Hier wird der Zusammenhang von Genuss (Grenznutzen) und Zeit graphisch dargestellt.

a2) Die Fläche adec ist größer als die Fläche plms, weil (a) die Größe eines und desselben Genusses abnimmt, wenn man mit der Bereitung des Genusses ununterbrochen fortfährt und (b) die Zeitspanne 'ad' größer als die Zeitspanne 'pl' ist.

a3) Stellen Sie graphisch den Zusammenhang dar, der sich ergibt, wenn man die Flächen, die durch die kleinen Buchstaben begrenzt werden (z. B.: adec) addiert und sie dem Abstand ab gegenüberstellt (stellen Sie nur den ungefähren – nicht exakten – Verlauf des Graphen dar.).

Lösung:



a4) Aufgrund welcher Annahme ist cr eine Gerade?

Lösung: cr ist eine Gerade aufgrund der konstanten Nutzenabnahme im Zeitablauf. Gossen geht damit von einer quadratischen Nutzenfunktion aus (zu einer quadratischen Nutzenfunktion ergibt sich eine lineare Grenznutzenfunktion).

a5) Insgesamt ist diese Abbildung eine graphische Repräsentation des folgenden Gesetzes:

Lösung: Die Abbildung ist die graphische Repräsentation des 1.Gossenschen Gesetzes.

Aufgabe 4.2 (Aufgabe 1, SS 1998, VWL A, 21.07.1998, leicht verändert)

a) "Aber in der Pampas bei Buenos Ayres lassen die Büffelzüchter bei Weitem das meiste Fleisch, obschon es ganz und gar die guten Eigenschaften besitzt, die uns hier unser Fleisch werth machen, bei voller Kenntniß dieser Eigenschaften verfaulen, sie ziehen (= züchten) bloß Büffel der Häute, Hörner und Hufe wegen; in Nordamerika wendet der neue Ansiedler ebenfalls bei voller Kenntniß der Eigenschaften des Holzes alle seine Kräfte an, um ganze Wälder zu vernichten, und Robinson trat (= Robinson Crusoe aus Daniel Defoes gleichnamigen Roman, 1719) bei voller Kenntniß der Eigenschaften des Goldes den gefundenen Klumpen dieses Metalls verächtlich mit dem Fuße (ein im Reiß-Buch zitierter Autor)."

Was will der Autor mit diesen Aussagen belegen oder unterstreichen? Kreuzen Sie im Folgenden jeweils richtig oder falsch an.

	richtig	falsch
a1) Dies sind Beispiele für ineffiziente Produktionen.		X
a2) Dies sind Beispiele für Ausnahmen von dem Grundsatz: "Es muss das Genießen so eingerichtet werden, dass die Summe des Genusses des ganzen Lebens ein Größtes werde."		X
a3) Dies sind Beispiele für Produktionen im Bereich des Gesetzes vom abnehmenden Ertragszuwachs.		X
a4) Der Wert von Gütern hängt auch von den Umgebungsbedingungen und der Ausstattung mit den jeweiligen Gütern ab.	X	
a5) Dies sind Beispiele zum Beleg der Behauptung, dass es keine absoluten Werte geben soll.	X	

b) Kreuzen Sie im Folgenden jeweils richtig oder falsch an.

Das 1. Gossensche Gesetz besagt:	richtig	falsch
b1) Die Grenzproduktivität des Konsums ist negativ.		X
b2) Je mehr der Konsument von einem Gut pro Zeiteinheit konsumiert, umso geringer ist der Nutzenzuwachs aus dem Konsum einer zusätzlichen Einheit.	X	
b3) Mit dem Güterkonsum steigt der Konsumnutzen des Konsumenten.		X
b4) Der Grenznutzen des Konsums eines Gutes nimmt bei fortgesetztem Konsum dieses Gutes im Zeitablauf ab.	X	
b5) Konsummenge eines Gutes und Nutzen eines Gutes haben bis zur Sättigungsmenge gleiche Vorzeichen.		X

Aufgabe 4.3 (Aufgabe 2, SS 2000, VWL B, 19.07.2000 [2. Wdh. vom WS 1999/2000], leicht verändert)

Einem Konsumenten möge die Wahl zwischen zwei Gütern *a* und *b* freistehen. Sein Genuss bezüglich Gut *a* werde durch die Nutzenfunktion

$$U_a(t_a) = -t_a^2 + 10t_a$$

und der Genuss bezüglich Gut *b* durch die Nutzenfunktion

$$U_b(t_b) = 10 \cdot \ln(t_b + 1)$$

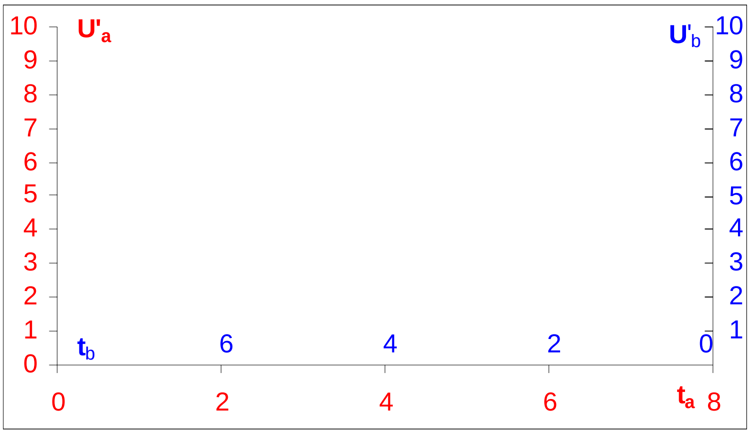
beschrieben. Dabei sei t_a (bzw. t_b) die Zeit, die zur Bereitung des Genusses *a* (bzw. *b*) eingesetzt wird.

Insgesamt mögen 8 h zur Verfügung stehen.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Grenznutzenfunktion für Genuss *a* und Genuss *b* und stellen Sie diese graphisch dar (denken Sie an die Achsenbeschriftungen!).

b) Welche dieser Nutzenfunktionen erfüllt das erste Gossensche Gesetz? Begründen Sie!

c) Bestimmen Sie graphisch die Mengen an Zeit, die für Genuss *a* und Genuss *b* eingesetzt werden, um die Summe des Genusses zum Größten zu bringen. (Tipp: Benutzen Sie das nachstehende Koordinatensystem.)



<u>Lösung:</u>

Zu a)

Vorbemerkung: Bevor die eigentliche Lösung erarbeitet werden soll, sollte man sich die Ableitung der logarithmischen Funktion vergegenwärtigen:

Es gilt für den natürlichen Logarithmus

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Für die Ableitung einer Funktion ln g(x) gilt im allgemeinen Fall:

$$\frac{d\ln g(x)}{dx} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

wobei zur Lösung die sogenannte „Kettenregel" (innere Ableitung mal äußere Ableitung) angewendet wurde.

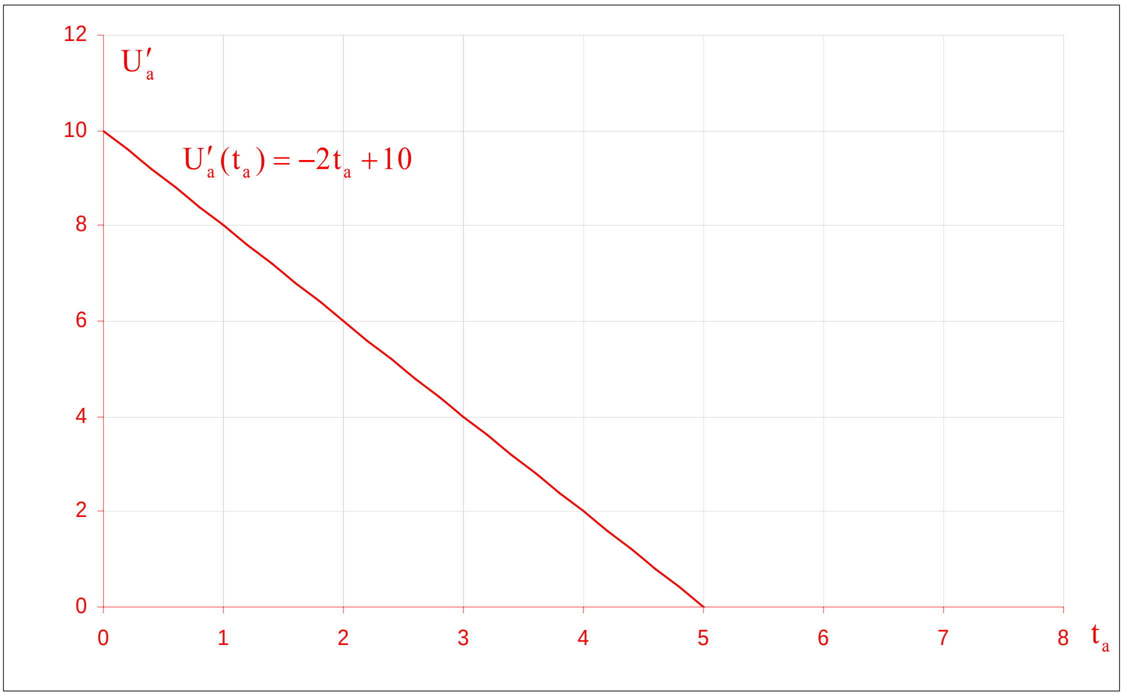
Für die für Gut b angegebene Nutzenfunktion lautet die Ableitung daher

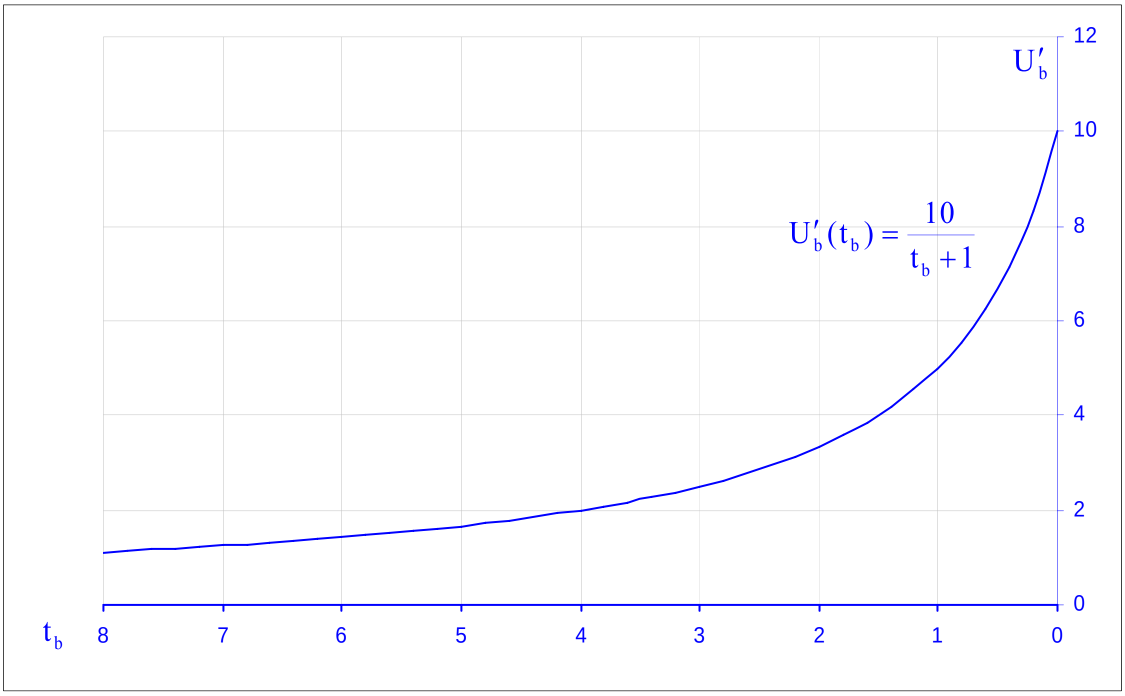
$$U'(t_b) = \frac{dU(t_b)}{dt_b} = \frac{d[10\ln(t_b+1)]}{dt_b} = 10\frac{1}{t_b+1}$$

Die Ableitung für die für Gut a angegebene Nutzenfunktion lautet:

$$U'_a(t_a) = \frac{dU(t_a)}{dt_a} = \frac{d(-t_a^2 + 10t_a)}{dt_a} = -2t_a + 10$$

Jetzt kann die Lösung erarbeitet werden:





Zu b)

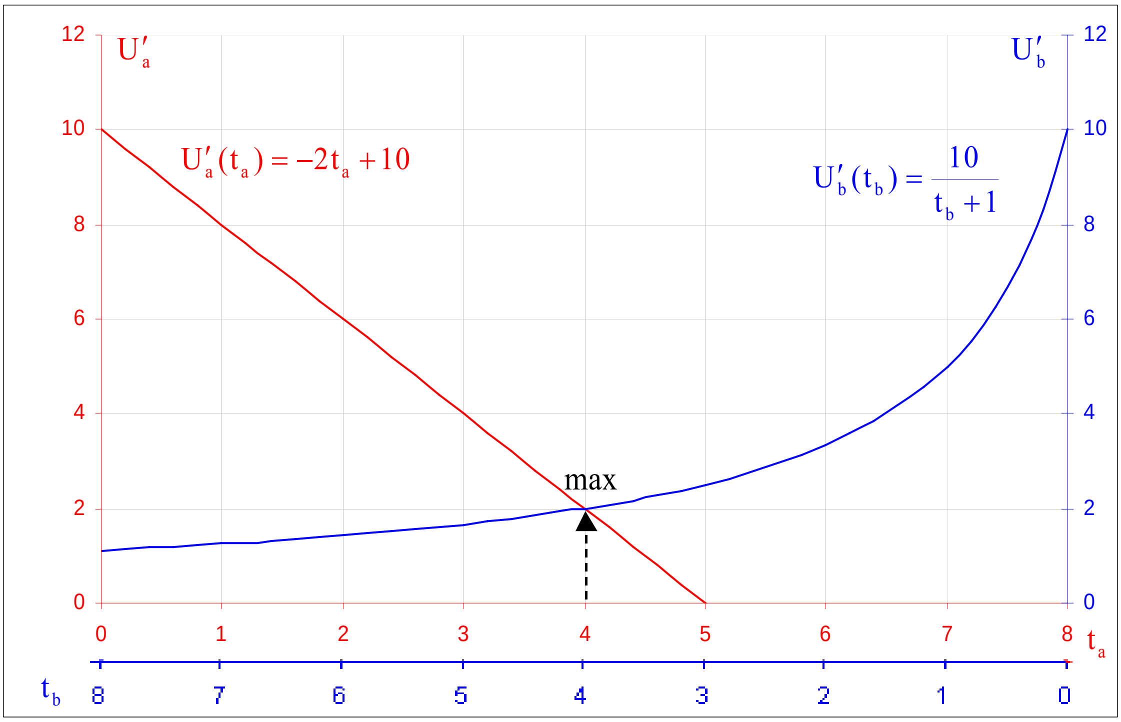
Beide Funktionen erfüllen das erste Gossensche Gesetz, da - wie aus den Funktionen und den Grafiken ersichtlich, die Ableitungen eine negative Steigung haben.

(Der Grenznutzen nimmt also mit steigendem t ab.)

(Sättigung tritt bei U_b allerdings bei ∞ auf).

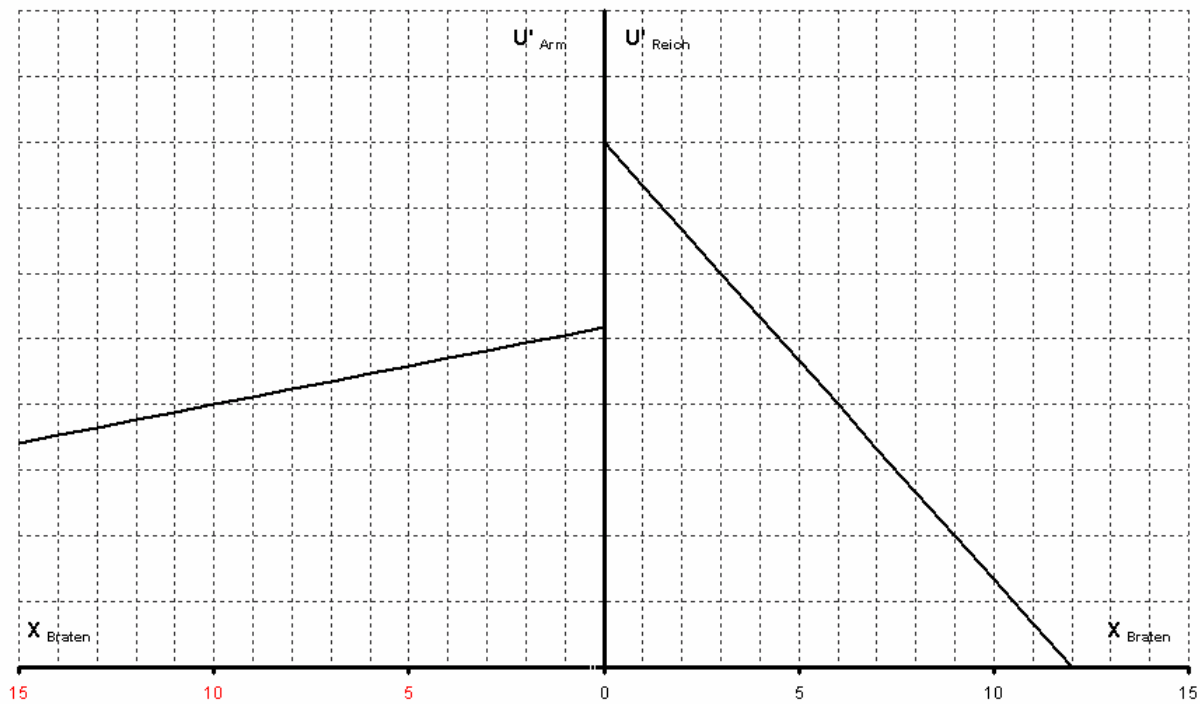
Zu c)

Das Optimum ist da, wo der Grenznutzen (der Genuss) des einen Gutes gleich dem Grenznutzen des anderen Gutes ist, also wo die Grenznutzenfunktionen sich schneiden. Nach Zeichnung ist das bei $t_a = 4$ und $t_b = 4$.



Aufgabe 4.4-Kontrollaufgabe (Aufgabe 2, WS 1997/98, VWL A, 04.03.1998 [2.Wdh. vom SS 1997])

Eine Gesellschaft bestehe aus zwei Individuen, das minderbemittelte Individuum "Arm" und das wohlhabende Individuum "Reich". Gehen Sie davon aus, dass Arm und Reich bezüglich des Gutes "Braten" Grenznutzenverläufe in der skizzierten Form besitzen. Arm habe 5 Einheiten, Reich habe 11 Einheiten Braten zur Verfügung.

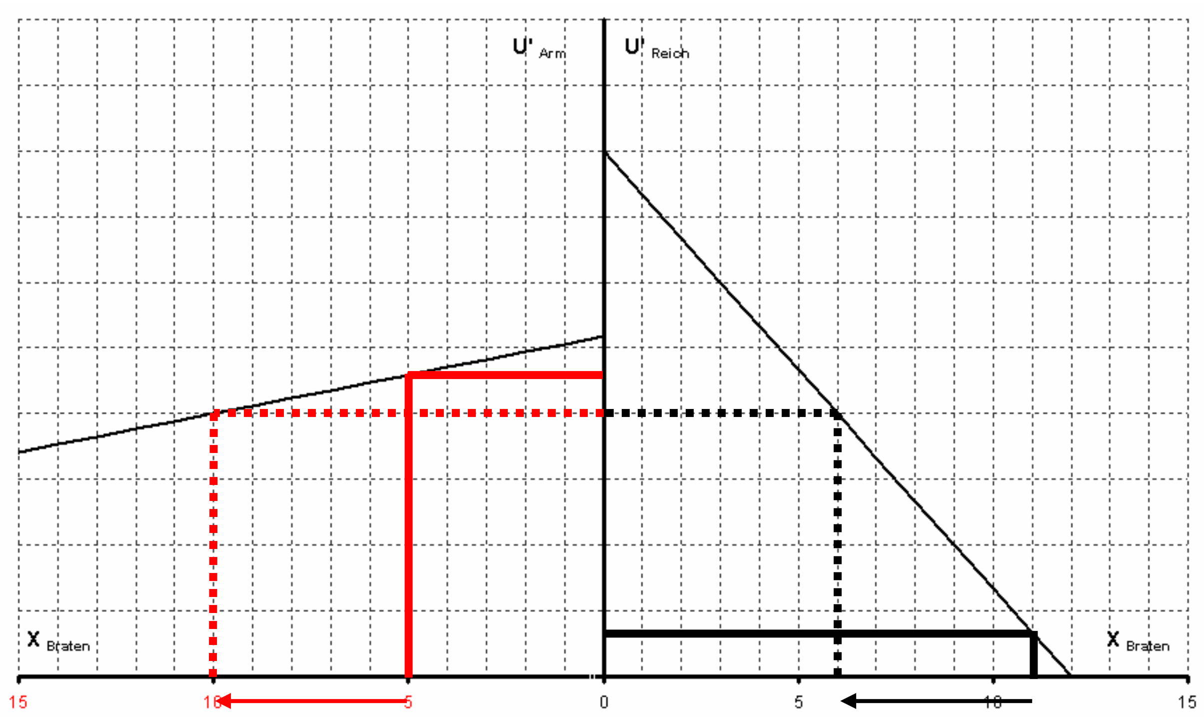


a) Erläutern Sie kurz, wie **Gossen** die unterschiedlichen Grenznutzen von Arm und Reich bezüglich Anfangshöhe und Verlauf erklären könnte.

<u>Lösung:</u> "Übung des Gesichts, des Gehörs, des Geschmacks, des Geistes." Nicht alle Individuen haben das gleiche Genussempfinden. Gossen könnte z.B. argumentieren, dass die größere Anfangshöhe bei "Reich" aus der Übung des Geschmacks herrührt. Den stärkeren Abfall bei "Reich" könnte man vielleicht durch eine größere Gewohnheit erklären.

b) Zeigen Sie graphisch und erläutern Sie kurz, welche Umverteilung durchzuführen ist, wenn folgender Grundsatz befolgt werden soll: "Es muss die Güterverteilung so eingerichtet werden, dass die Nutzensumme der Gesellschaft maximiert werde".

Lösung:



Die Summe des Nutzens ist dann am größten, wenn der Grenznutzen von Arm gleich dem Grenznutzen von Reich ist; andernfalls könnte eine Umverteilung den Gesamtnutzen vergrößern. Bei insgesamt 5 + 11 = 16 zur Verfügung stehenden Braten ergibt sich nach Zeichnung, dass der Grenznutzen gleich ist, wenn Arm 10 und Reich 6 Braten bekommt, also eine Umverteilung von 5 Braten von Reich an Arm erfolgt.

Aufgabe 4.5-Kontrollaufgabe (Aufgabe 2, SS 2000, VWL B, 19.07.2000 [2. Wdh. vom WS 1999/2000], leicht verändert)

Einem Konsumenten möge die Wahl zwischen zwei Gütern *a* und *b* freistehen. Sein Genuss bezüglich Gut *a* werde durch die Nutzenfunktion

$$U_a(t_a) = -t_a^2 + 10t_a$$

und der Genuss bezüglich Gut *b* durch die Nutzenfunktion

$$U_b(t_b) = -\frac{1}{2}t_b^2 + 6t_b$$

beschrieben. Dabei sei t_a (bzw. t_b) die Zeit, die zur Bereitung des Genusses *a* (bzw. *b*) eingesetzt wird.

Insgesamt mögen 8 h zur Verfügung stehen.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Grenznutzenfunktion für Genuss *a* und Genuss *b* und stellen Sie diese graphisch dar (denken Sie an die Achsenbeschriftungen!).
b) Welche dieser Nutzenfunktionen erfüllt das erste Gossensche Gesetz? Begründen Sie!
c) Bestimmen Sie graphisch die Mengen an Zeit, die für Genuss *a* und Genuss *b* eingesetzt werden, um die Summe des Genusses zum Größten zu bringen. (Tipp: Benutzen Sie das nachstehende Koordinatensystem.)
d) Bestimmen Sie das Gleiche rechnerisch. (Tipp: Führen sie t_b auf t_a zurück, in dem Sie die insgesamt zur Verfügung stehende Zeit berücksichtigen.

Lösung:

Zu a)

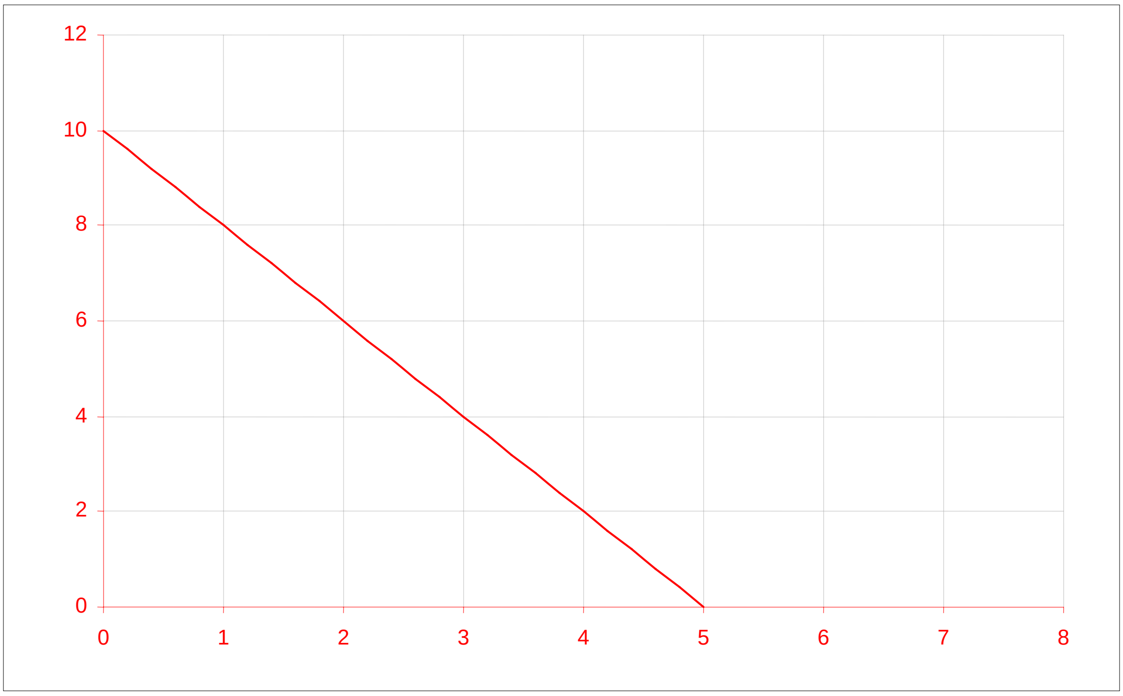
Die Ableitung für die für Gut a angegebene Nutzenfunktion lautet:

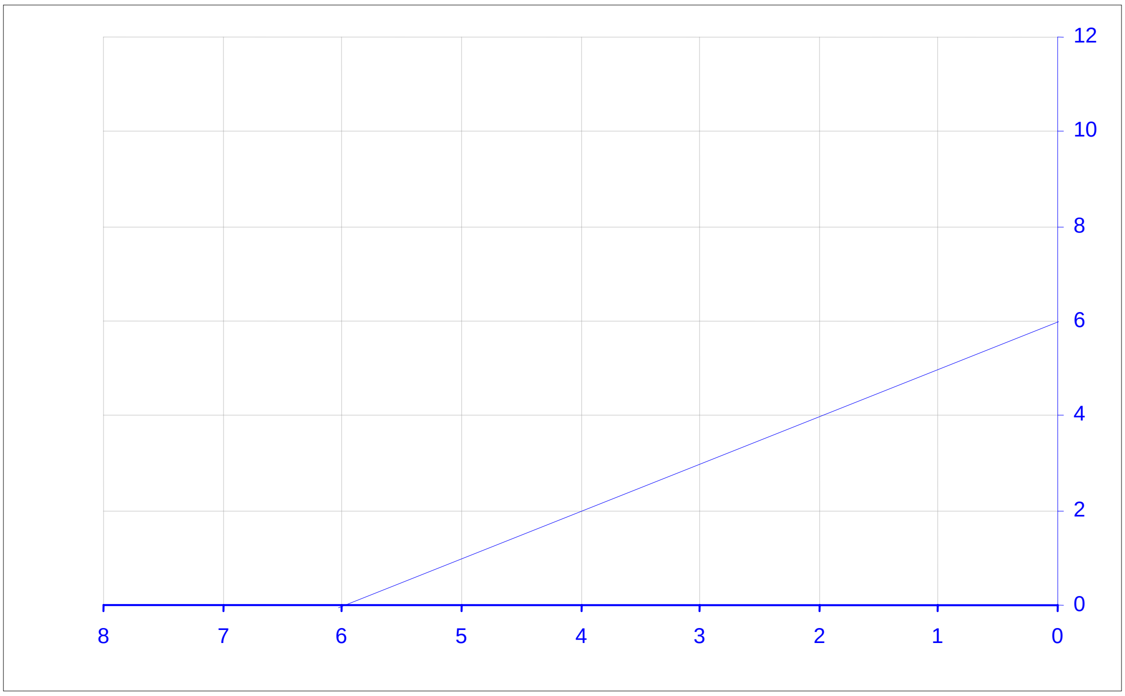
$$\frac{\delta U_a}{\delta t_a} = \frac{\delta(-t_a^2 + 10t_a)}{\delta t_a} = -2t_a + 10$$

Für die für Gut b angegebene Nutzenfunktion lautet die Ableitung:

$$\frac{\delta U_b}{\delta t_b} = \frac{\delta(-\frac{1}{2}t_b^2 + 6t_b)}{\delta t_b} = -t_b + 6$$

Jetzt kann die Lösung erarbeitet werden:

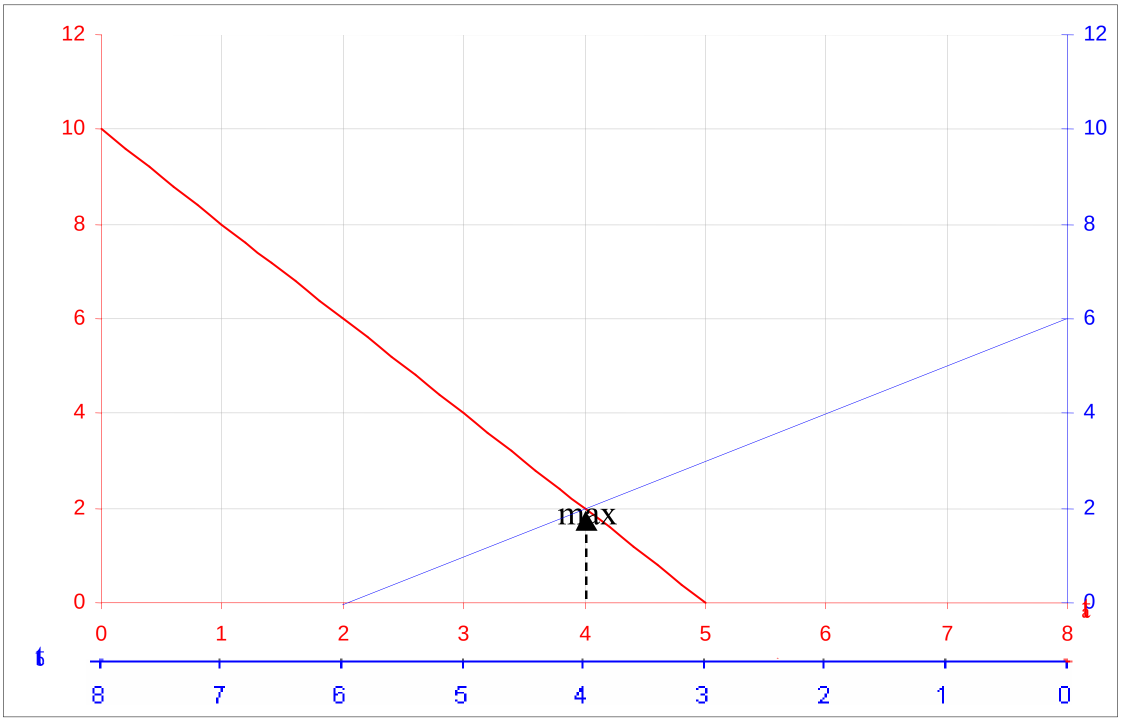




b) Beide Funktionen erfüllen das zweite Gossensche Gesetz, da - wie aus den Funktionen und den Grafiken ersichtlich, die Ableitungen eine negative Steigung haben.

(Der Grenznutzen nimmt also mit steigendem t ab.)

c) Das Optimum ist da, wo der Grenznutzen (der Genuss) des einen Gutes gleich dem Grenznutzen des anderen Gutes ist, also wo die Grenznutzenfunktionen sich schneiden. Nach Zeichnung ist das bei $t_a = 4$ und $t_b = 4$.



d)

1. Gleichsetzen der Grenznutzenfunktionen: $-2t_a + 10 = -t_b + 6$

2. Aus der Zeitrestriktion: $t_a + t_b = 8 \Leftrightarrow t_a = 8 - t_b$

3. Einsetzen:

$$\begin{aligned}
& -2t_a + 10 = -t_b + 6 \\
& \Leftrightarrow -2(8 - t_b) + 10 = -t_b + 6 \\
& \Leftrightarrow -16 + 2t_b + 10 = -t_b + 6 \\
& \Leftrightarrow -6 + 2t_b = -t_b + 6 \\
& \Leftrightarrow 3t_b = 12 \\
& \Leftrightarrow t_b = 4
\end{aligned}$$

4. $t_a = 8 - t_b \Leftrightarrow t_a = 8 - 4 = 4$

Aufgabe 4.6 (Aufgabe 1, WS 1997/98, VWL A, 06.10.1997 [1. Wdh. vom SS 1997] leicht verändert)

"Der Mensch, dem die Wahl zwischen mehreren Genüssen frei steht, dessen (Einkommen) aber nicht ausreicht, alle vollaus sich zu bereiten, muss, wie verschieden auch die absolute Größe der einzelnen Genüsse sein mag, um die Summe seines Genusses zum Größten zu bringen, bevor er auch nur den größten sich vollauf bereitet, sie alle theilweise bereiten, und zwar in einem solchen Verhältniß, dass die Größe eines jeden Genusses (der letzten nachgefragten Gütermenge) bei allen ... die gleiche (ist)." (H.H. Gossen, 1854)

Diese Ausführungen Gossens sind als das II. Gossensche Gesetz bekannt. In der modernen Mikroökonomie ist allerdings die formale Herleitung bzw. Darstellung üblich.

a. Zeigen Sie formal die Gültigkeit dieses Gesetzes, indem Sie eine Zielfunktion unter Einhaltung einer Nebenbedingung maximieren. (Hinweis: $U = U(x_1, x_2)$!)
b. Leiten Sie das II. Gossen'sche Gesetz mit Hilfe der Lagrangemethode her.

   (Hinweis: $U = U(x_1, x_2)$!)
c. Interpretieren Sie das formale Ergebnis aus ökonomischer Sicht.

__Lösung:__

a.

Die Zielfunktion ist die Nutzenfunktion des Individuums, die es zu maximieren gilt:

$$U = U(x_1, x_2) \rightarrow \max.!$$

Die einzuhaltende Nebenbedingung ist die bekannte Budgetrestriktion:

$$E = p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad \Rightarrow$$

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{E}{p_2}$$

$$x_2 = f(x_1)$$

Die Einhaltung der Restriktion kann durch deren Integration in die Zielfunktion sichergestellt werden:

$$U = U(x_1, f(x_1))$$

$$U = U\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{E}{p_2}\right)$$

Mit Hilfe der Extremwertsuche (implizite Funktion total nach x_1 Ableiten und =0 setzen) ergibt sich:

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_1}}_{\substack{\text{Direkte}\\ \text{Änderung}\\ \text{durch}\\ \text{Variation}\\ \text{von } x_1}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}}_{\substack{\text{Indirekte}\\ \text{Änderung}\\ \text{durch}\\ \text{Variation}\\ \text{von } x_1 \text{ über } x_2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_1}}_{\substack{\text{Direkte}\\ \text{Änderung}\\ \text{durch}\\ \text{Variation}\\ \text{von } x_1}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)}_{\substack{\text{Indirekte}\\ \text{Änderung}\\ \text{durch}\\ \text{Variation}\\ \text{von } x_1 \text{ über } x_2}} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U / \partial x_2}{p_2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Dies ist die formale Beschreibung der Aussage des II. Gossenschen Gesetzes.

b.

Herleitung des II. Gossenschen Gesetzes mit Hilfe des Lagrangeverfahrens:

1. Schritt: Aufstellen der Zielfunktion

$$U(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

2. Schritt: Herleitung der Nebenbedingung

$$E = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

3. Schritt: Aufstellen der Lagrangefunktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda \cdot (E - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2)$$

4. Schritt: Partielle Ableitungen bilden und "Null setzen"

I) $$L_{x_1} = \frac{\delta U}{\delta x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta U}{\delta x_1} = \lambda p_1$$

II) $$L_{x_2} = \frac{\delta U}{\delta x_2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta U}{\delta x_2} = \lambda p_2$$

III) $$L_{\lambda} = E - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

Aus I) und II) erhalten wir:

$$\frac{\delta U}{\delta x_1} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{\delta U}{\delta x_2} \cdot \frac{1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\delta U}{\delta x_1}}{\frac{\delta U}{\delta x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

c.

Um seinen Gesamtnutzen zu maximieren, muss das Individuum sich so verhalten, dass

- der Nutzen einer zusätzlichen Geldeinheit beim Kauf von x_1 gleich dem Nutzen einer zusätzlichen Geldeinheit beim Kauf von x_2 ist

bzw.

- das Verhältnis der Grenznutzen gleich dem Preisverhältnis der betrachteten Güter ist.

Aufgabe 4.7 (Aufgabe 1, WS 1998/99, VWL A, 19.02.1999 [2. Wdh. vom SS 1999])

Die "Utilitaristische Entscheidungsregel" lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[U_i(Y) - U_i(X) \right] > 0$$

a) Übersetzen Sie die mathematische Formulierung dieser Entscheidungsregel in eine verbale Formulierung, indem sie neben der Gesamtaussage <u>jedes</u> der o.a. Symbole und <u>jeden</u> Buchstaben erläutern!

b) Inwiefern ist die praktische Anwendung dieser Regel mit schwer überwindbaren Problemen verbunden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

Zu a) Erläuterung der Formel der „Utilitaristischen Entscheidungsregel“:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[U_i(Y)-U_i(X)\right]>0$$

- Jedes Individuum i hat eine Nutzenfunktion für die Zustände X und Y.
- Der Nettonutzen des Individuums i ergibt sich aus: U_i (Y) - U_i (X).
- Gilt U_i (Y) - U_i (X) > 0, wird Zustand Y vom Individuum vorgezogen.
- Besteht die Gesellschaft aus n Individuen, wird der Nettonutzen jedes einzelnen bestimmt und dann addiert $\left(\sum_{i=1}^{n}\right)$.
- Ist die Summe der Differenzen größer 0, so wird Zustand Y präferiert, da der Nettonutzen positiv ist (Wohlfahrtssteigerung für die Gesellschaft).

Zu b) *Probleme:*

1. Ist die Nutzenfunktion des Individuums bestimmbar/bekannt? (Lösung des Bewertungsproblems).
2. Kann diese auch von den Entscheidungsträgern ermittelt werden?
3. Sind alle Individuen gleich?
4. Sind Nutzeneinheiten für alle Individuen identisch?
5. Kann *n* zweifelsfrei ermittelt werden?
6. Kardinale Nutzenmessung? (Ordinale Nutzenfunktion)
7. Nutzen bezieht sich auf zukünftige Erwartungen (Informationsproblem).

Aufgabe 4.8 Kontrollaufgabe (Aufgabe 2, WS 1997/98, VWL A, 06.10.1997 [1.Wdh.vom SS 1997])

Im Rahmen der Diskussion um eine grundlegende Studienreform in der Bundesrepublik Deutschland wird immer wieder die Einführung von Studiengebühren vorgeschlagen. Als Mitarbeiterin/Mitarbeiter des Ministeriums für Wissenschaft und Forschung sollen Sie die Entscheidungsfindung theoretisch vorbereiten. Aus Ihrem Studium der Mikroökonomie fällt

Ihnen sofort die "Utilitaristische Entscheidungsregel" ein, mit deren Hilfe ein solches Problem zu lösen ist.

a) Versuchen Sie, dieses Entscheidungsproblem mit Hilfe der "Utilitaristischen Entscheidungsregel" zu strukturieren.
b) Erläutern Sie zwei Probleme, die bei der Anwendung dieses Verfahrens auftreten.

Zu a)

Folgende zwei Zustände sind zu unterscheiden:

- X sei der Zustand ohne Studiengebühren;
- Y sei der Zustand mit Studiengebühren.

Zur Entscheidungsfindung ist nun der Nettonutzen aller n betroffenen Individuen in Abhängigkeit von den beiden Zuständen zu ermitteln, also

$$U_i(Y) - U_i(X) \qquad \underset{i=1\ldots n}{\forall_i} .$$

Diese Betroffenen sind beispielsweise Studenten und Dozenten, aber auch alle Steuerzahler.

Aus der Addition aller individuellen Nettonutzen ergibt sich die gesellschaftliche Wohlfahrtsänderung:

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n} U_i(Y) - U_i(X) .$$

Die „Utilitaristische Entscheidungsregel" besagt nun, dass Zustand Y (hier die Einführung von Studiengebühren) vorzuziehen ist, wenn $\Delta W > 0$, also die Summe aller individuellen Nettonutzen positiv ist.

Zu b)

1. Problem der Nutzenmessung

Dieses Verfahren setzt die Messbarkeit individuellen Nutzens voraus. Bis heute ist aber kein befriedigendes Verfahren zur Nutzenmessung gefunden worden.

2. Problem der Datenerhebung

Selbst wenn die Nutzenmessung in interpersonell vergleichbaren Skalen möglich wäre, ergäbe sich das ungeheure Problem der Erfassung aller betroffenen Personen und der Ermittlung ihres persönlichen Nettonutzens.

Aufgabe 4.9 (Aufgabe 3, WS 1997/98, VWL A, 04.03.1998 [2. Wdh. vom SS 1997])

Ein Individuum habe die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\sqrt{x_1 x_2}$.

(1) Erfüllt die Nutzenfunktion des Individuums das 1. Gossensche Gesetz? Begründen Sie Ihre Antwort!

(2) Bestimmen Sie für beliebige, aber fest vorgegebene p_1, p_2 und E die vom Individuum nachgefragte Menge von Gut x_2. Gehen Sie dabei vom 2. Gossenschen Gesetz und der Budgetbedingung aus.

(3) Stellen Sie die Nachfrage nach Gut x_2 in Abhängigkeit von p_2 graphisch dar. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle mit mindestens 5 Werten. Gehen Sie dabei von $E = 20$ aus. Denken Sie an die Achsenbeschriftungen.

<u>**Lösung:**</u>

Zu (1)

1. Gossensche Gesetz

>>Die Größe eines und desselben Genusses nimmt, wenn wir mit der Bereitung des Genusses ununterbrochen fortfahren, fortwährend ab, bis zuletzt Sättigung eintritt. <<

Eine Nutzenfunktion erfüllt dieses Gesetz dementsprechend, wenn die Grenznutzenfunktionen einen fallenden Verlauf aufweisen. Um dies zu prüfen, bilden wir die partiellen Ableitungen der Funktion:

$$U(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\sqrt{x_1 x_2}$$

1. $$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$2.\ \frac{\partial U}{\partial x_2}=\frac{1}{2}\frac{3}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$$

Der Grenznutzen des Gutes x_1 (x_2) fällt mit steigendem x_1 (x_2), weil der Nenner der partiellen Ableitung größer wird. Die Grenznutzenfunktionen weisen also einen fallenden Verlauf auf. Die Nutzenfunktion erfüllt somit das 1. Gossensche Gesetz.

Zu (2)

Es ist mit Hilfe des 2. Gossenschen Gesetzes die (Marshallsche) Nachfragefunktion des Individuums bezüglich des Gutes x_2 zu bestimmen.

2. Gossensches Gesetz:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

Einsetzung der partiellen Ableitungen und Auflösung nach x_2 liefert (die Einkommenskonsumkurve):

$$\frac{\frac{3}{4}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}}{\frac{3}{4}\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}}=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}\cdot\frac{4}{3}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}\quad\rightarrow$$

$$x_2=\frac{p_1}{p_2}x_1 \qquad (*)$$

Setzt man (*) in die Budgetbedingung ein und formt nach x_1 um, so erhält man die (Marshallsche) Nachfrage nach Gut x_1:

$$E=p_1x_1+p_2\cdot\frac{p_1}{p_2}x_1=2p_1x_1\quad\rightarrow$$

$$x_1=\frac{E}{2p_1}$$

Mit (*) ergibt sich die (Marshallsche) Nachfrage nach Gut x_2:

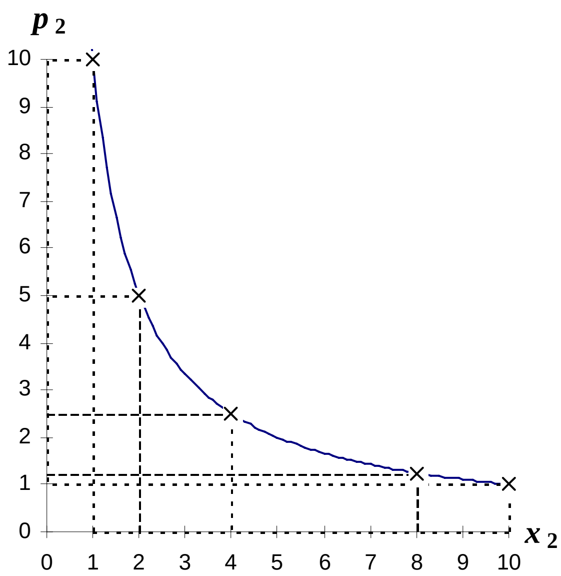
$$x_2 = \frac{E}{2p_2}$$

Zu (3)

Mit $E = 20$ ergibt sich z.B. die folgende Wertetabelle:

p_2	x_2
0	∞
1	10,00
2	5,00
4	2,50
8	1,25
10	1,00
∞	0,00

Man erhält dementsprechend die folgende graphische Darstellung:



Aufgabe 4.10 (Aufgabe 1, WS 2004/2005, VWL B, 22.10.04)

Ein Nutzenmaximierendes Individuum will sein Haushaltsbudget von 400 Euro vollständig für die folgenden Güter ausgeben:

Gut 1 zum Preis von 100 Euro pro Stück,

Gut 2 zum Preis von 32 Euro pro Stück,

Gut 3 zum Preis von 48 Euro pro Stück und

Gut 4 zum Preis von 14 Euro pro Stück

Der Grenznutzen der Güter ist in der folgenden Tabelle festgehalten:

Stück	Grenznutzen Gut 1	Grenznutzen Gut 2	Grenznutzen Gut 3	Grenznutzen Gut 4
1.	75	32	24	18
2.	50	24	12	13
3.	35	16	8	9
4.	20	10	0	7

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des zweiten Gossenschen Gesetzes die Nachfragemengen nach den Gütern 1 bis 4 welche bei dem gegebenen Haushaltsbudget den maximalen Nutzen generieren und tragen Sie dies in die folgende Tabelle ein:

Lösung: Nach dem 2.Gossenschen Gesetz gilt:

$$\frac{\frac{\delta U}{\delta x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\delta U}{\delta x_2}}{p_2} = \frac{\frac{\delta U}{\delta x_3}}{p_3} = \frac{\frac{\delta U}{\delta x_4}}{p_4}$$

Stück	GN Gut 1/Preis 1	GN Gut 2/Preis 2	GN Gut 3/Preis 3	GN Gut 4/Preis 4
1.	75/100 = 0,75	32/32 = 1	24/48 = 0,5	18/14 = 1,29
2.	50/100 = 0,5	24/32 = 0,75	12/48 = 0,25	13/14 = 0.93
3.	35/100 = 0,35	16/32 = 0,5	8/48 = 0,16	9/14 = 0,643
4.	20/100 = 0,2	10/32 = 0,3125	0/48 = 0	7/14 = 0,5

Stückzahl			Euro
2	Gut 1	=	200
3	Gut 2	=	96

1	Gut 3	=	48
4	Gut 4	=	56
		Σ	400

b) Kreuzen Sie im Folgenden jeweils richtig oder falsch an.

Für jede *korrekte* Antwort gibt es *einen Punkt*, für jede *nicht-korrekte* wird ein *halber Punkt abgezogen*! Wenn Sie bei einer Aussage *kein* Kästchen ankreuzen bekommen Sie dafür *null* Punkte!

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen zum 2. Gossenschen Gesetz:

	richtig	falsch
1) Der Nutzen einer zusätzlichen Geldeinheit beim Kauf eines Gutes muss für alle Güter gleich sein.	X	
2) Das Verhältnis der Grenznutzen muss gleich dem Preisverhältnis sein.	X	
3) Das 2. Gossensche Gesetz ist nicht mit der ordinalen Präferenztheorie zu vereinbaren.		X
4) Voraussetzung für die Anwendung des 2. Gossenschen Gesetzes ist die Lösung des Problems der Nutzenmessung.		X